TRIANGLES SEMBLABLES

I) Triangles semblables et angles

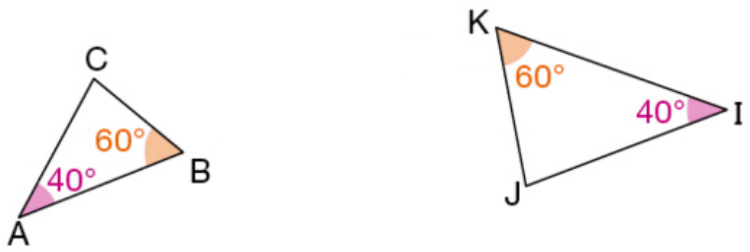
Définition :

Des triangles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Propriété :

Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.

Exemple :



On a $\widehat{CAB} = \widehat{KIJ} = 40°$ et $\widehat{ABC} = \widehat{IKJ} = 60°$

Ces deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure donc ces 2 triangles sont semblables.

Les deux autres angles ont également la même mesure.
En effet, dans un triangle, la somme des mesures des angles est toujours égale à 180°.
Donc $\widehat{ACB} = 180 - (40 + 60) = 80°$ et $\widehat{IJK} = 180 - (40 + 60) = 80°$

Vocabulaire :

$\widehat{CAB} = \widehat{KIJ}$. $\widehat{CAB}$ *et* $\widehat{KIJ}$ sont des angles homologues.
$\widehat{ABC} = \widehat{IKJ}$. $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{IKJ}$ sont des angles homologues.
$\widehat{ACB} = \widehat{IJK}$. $\widehat{ACB}$ *et* $\widehat{IJK}$ sont des angles homologues.

B et K sont des sommets homologues.
A et I sont des sommets homologues.
C et J sont des sommets homologues.

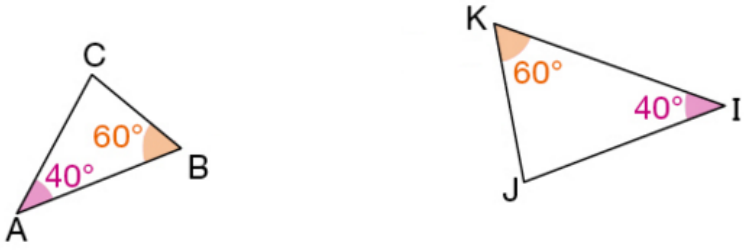
[AB] et [IK] sont des côtés homologues.
[AC] et [IJ] sont des côtés homologues.
[BC] et [KJ} sont des côtés homologues.

II) Triangles semblables et longueurs

Propriété :

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

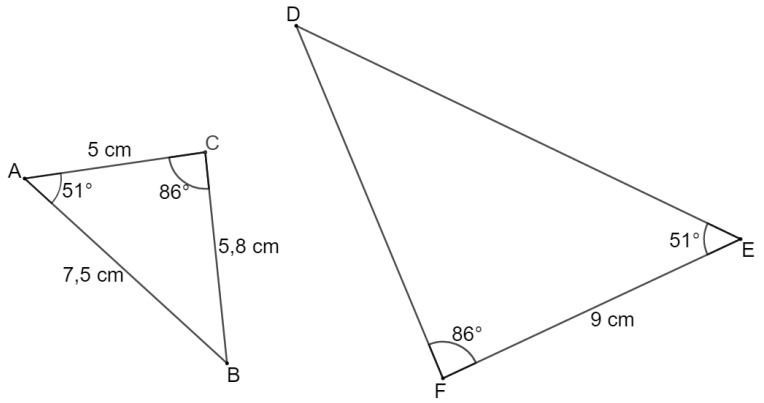
Exemple :
Reprenons nos deux triangles de l'exemple précédent :



Les triangles ABC et IJK sont semblables donc les longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles.

On a donc : $\dfrac{AB}{IK} = \dfrac{AC}{IJ} = \dfrac{BC}{KJ}$ ou $\dfrac{IK}{AB} = \dfrac{IJ}{AC} = \dfrac{KJ}{BC}$

Exercice résolu



1) Démontrer que les triangles ABC et DEF sont des triangles semblables

$\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$

ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ces 2 triangles sont semblables.

2) Déterminer les longueurs DF et DE

Les triangles ABC et DEF sont semblables donc les longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles.

Déterminons leurs côtés homologues :
[AC] et [EF]
[BC] et [DF]
[BA] et [DE]

On a donc : $\dfrac{AC}{EF} = \dfrac{BC}{DF} = \dfrac{BA}{DE}$ Remplaçons les longueurs connues

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{5,8}{DF} = \dfrac{7,5}{DE}$ Calculons...

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{5,8}{DF}$

$5 \times DF = 9 \times 5,8$

$DF = \dfrac{9 \times 5,8}{5}$

$DF = 10,44\ cm$

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{7,5}{DE}$

$5 \times DE = 9 \times 7\ ,5$

$DE = \dfrac{9 \times 7,5}{5}$

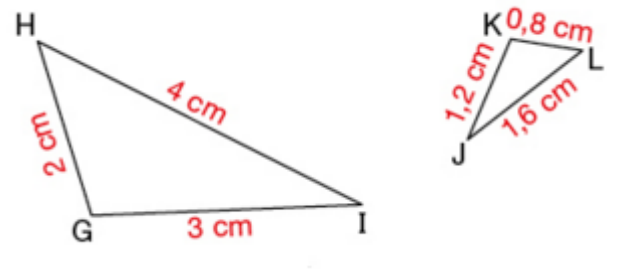
$DE = 13,5\ cm$

<u>Propriété :</u>

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Exercice résolu

Les triangles suivants sont-ils semblables ?



La première étape est de classer les longueurs des côtés par ordre croissant :

Triangle GHI	Triangle JKL
GH=2 cm	KL=0,8 cm
GI=3 cm	JK=1,2 cm
HI=4 cm	JL=1,6 cm

Comparons les rapports de longueurs :

$\dfrac{GH}{KL} = \dfrac{2}{0,8} = 2,5$ $\dfrac{GI}{JK} = \dfrac{3}{1,2} = 2,5$ $\dfrac{HI}{JL} = \dfrac{4}{1,6} = 2,5$

Donc les triangles GHI et JKL sont des triangles semblables.
GHI est un agrandissement de JKL (coefficient $k = 2,5$)
JKL est une réduction de GHI (coefficient $k = \dfrac{1}{2,5} = 0,4$)